GROUPE A

ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

Ce problème décrit un outil classique de l'analyse numérique, les fonctions splines cubiques.

Question préliminaire

On munit l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ de la norme définie par la relation :

(1) $$\| x \| = \| (x_1, x_2, \ldots, x_n) \| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i |.$$

Pour toute matrice $A = [a_{ij}]$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ on pose

$$Ax = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad \text{avec} \quad y_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{ij} x_j \quad \text{et}$$

(2) $$\| A \| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|}.$$

Montrer que l'on définit ainsi une norme sur l'espace vectoriel des matrices $n \times n$. On dit qu'une matrice $A = [a_{ij}]$ est à diagonale strictement dominante s'il existe $\delta > 0$ tel que l'on ait

(3) pour tout i, $(1 \leqslant i \leqslant n)$ $$| a_{ii} | \geqslant \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} | a_{ij} | + \delta$$

Prouver que si A est à diagonale strictement dominante elle est inversible, et vérifie la relation $\| A^{-1} \| \leqslant 1/\delta$.

Dans la suite du problème on désignera par u une fonction réelle définie sur l'intervalle $[0, 1]$ et admettant quatre dérivées continues u', u'', u''', $u^{(4)}$ sur $[0, 1]$ (aux points 0 et 1 les dérivées seront prises à droite et à gauche respectivement). On désigne par N un entier positif $(N \geqslant 1)$, on pose $h = \dfrac{1}{N+1}$ et on note x_i les points $i.h$

$$(x_0 = 0, \qquad x_{N+1} = 1).$$

I

On se propose de démontrer le théorème suivant.

Théorème 1. Il existe une unique fonction s définie sur l'intervalle $[0, 1]$ possédant les propriétés suivantes :

(4) Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ $(0 \leqslant i \leqslant N)$ s coïncide avec un polynôme du troisième degré.

(5) s est deux fois continûment dérivable sur l'intervalle $[0, 1]$.

(6) s vérifie les propriétés d'interpolation suivantes :

$$s(x_i) = u(x_i) \qquad (0 \leqslant i \leqslant N + 1),$$
$$s'(0) = u'(0) \qquad s'(1) = u'(1).$$

Les candidats peuvent, s'ils le désirent, utiliser la méthode suivante, analogue à celle qui sera utilisée au § II :

On introduit un vecteur $p = (p_0, p_1, \ldots, p_{N+1})$ à $N + 2$ composantes, $p_0 = u'(0)$, $p_{N+1} = u'(1)$, les autres composantes restant à déterminer.

a. Prouver que pour tout i $(0 \leqslant i \leqslant N)$, il existe un polynôme g_i du troisième degré vérifiant les relations :

$$g_i(x_i) = u(x_i), \qquad g_i(x_{i+1}) = u(x_{i+1}),$$
$$g'_i(x_i) = p_i, \qquad g'_i(x_{i+1}) = p_{i+1}.$$

b. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0, 1]$ dont la restriction à $[x_i, x_{i+1}]$ coïncide avec celle de g_i $(0 \leqslant i \leqslant N)$. Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que g soit deux fois continûment dérivable est que $p = (p_0, p_1, \ldots, p_{N+1})$ soit solution d'une équation linéaire $Ap = k$, où k est un vecteur à $N + 2$ composantes et A une matrice $(N + 2) \times (N + 2)$ que l'on déterminera.

c. En utilisant la question préliminaire, prouver le théorème 1.

d. Montrer que l'ensemble des fonctions définies sur $[0, 1]$ et vérifiant les assertions (4) et (5) est un espace vectoriel de dimension finie. Calculer sa dimension.

II

Pour toute fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$, à valeurs réelles et continue, on pose

$$\| f \|_{[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} | f(x) |$$

a. On désigne par t la fonction affine sur l'intervalle $[0, h]$ vérifiant les relations $u(0) = t(0)$, $u(h) = t(h)$.

Prouver l'inégalité

$$\| u - t \|_{[0,h]} \leqslant \frac{1}{8} \| u'' \|_{[0,h]} \cdot h^2 . \tag{7}$$

On cherche à établir dans cette partie le résultat suivant :

Théorème 2. On désigne par s la fonction définie par le théorème 1. Alors il existe trois constantes C_1, C_2, C_3 dépendant de u et de ses dérivées, mais indépendantes de h, telles que l'on ait :

$$\| u - s \|_{[0,1]} \leqslant C_1 h^4 \tag{8}$$

$$\| u' - s' \|_{[0,1]} \leqslant C_2 h^3 \tag{9}$$

$$\| u'' - s'' \|_{[0,1]} \leqslant C_3 h^2 \tag{10}$$

Pour cela on suggère de résoudre les questions suivantes :

b. Calculer les expressions :

$$2 s''(0) + s''(x_1)$$
$$s''(x_{i-1}) + 4 s''(x_i) + s''(x_{i+1}) \quad (1 \leqslant i \leqslant N)$$
$$s''(x_N) + 2 s''(1)$$

c. On désigne par $\overline{s''}$ et $\overline{u''}$ les vecteurs à $N + 2$ composantes :

$$\overline{s''} = (s''(0), s''(x_1), \ldots, s''(x_N), s''(1))$$
$$\overline{u''} = (u''(0), u''(x_1), \ldots, u''(x_N), u''(1));$$

déduire de *b.* que $\overline{s''}$ est solution d'une équation de la forme $B\overline{s''} = l$, où l est un vecteur à $N + 2$ composantes, et où B est une matrice $(N + 2) \times (N + 2)$.

Former l'expression $m = B(\overline{s''} - \overline{u''})$ et donner une majoration de $\| m \|$.

d. On désigne par t_i la fonction affine sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ vérifiant les relations $t_i(x_i) = u''(x_i)$, $t_i(x_{i+1}) = u''(x_{i+1})$. $(0 \leqslant i \leqslant N)$. Prouver les relations :

$$\| s'' - u'' \|_{[x_i, x_{i+1}]} \leqslant \| s'' - t_i \|_{[x_i, x_{i+1}]} + \| t_i - u'' \|_{[x_i, x_{i+1}]} \; (0 \leqslant i \leqslant N).$$

Démontrer (10) et terminer la démonstration du théorème 2.

III

Pour finir on étudie des propriétés supplémentaires des fonctions splines. On désigne toujours par u et s les fonctions introduites aux numéros I et II.

a. Prouver la relation

$$\int_0^1 (u''(x))^2 \, dx = \int_0^1 (u''(x) - s''(x))^2 \, dx + \int_0^1 (s''(x))^2 \, dx \tag{11}$$

b. On désigne par U_u l'ensemble des fonctions φ deux fois continûment dérivables sur l'intervalle $[0, 1]$ vérifiant les relations :

$$\varphi(x_i) = u(x_i) \quad , \quad 0 \leqslant i \leqslant N + 1$$
$$\varphi'(0) = u'(0) \quad , \quad \varphi'(1) = u'(1).$$

Prouver la relation :

$$\int_0^1 (s''(x))^2 \, dx \leqslant \int_0^1 (\varphi''(x))^2 \, dx \quad \forall \varphi \in U_u . \tag{12}$$

c. Soit R l'espace vectoriel défini au I.*d.* Montrer que si $r \in R$ on a la relation

$$\int_0^1 (u''(x) - s''(x))^2 \, dx \leqslant \int_0^1 (u''(x) - r''(x))^2 \, dx . \tag{13}$$

IV

Pouvez-vous imaginer des applications de ce qui précède à des problèmes de calcul numérique?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail